ODHADY ZÁKLADNÍHO RIZIKA V REGRESNÍCH MODELECH OPRAV

ESTIMATION OF THE BASELINE HAZARD IN REGRESSION MODELS FOR REPAIRABLE SYSTEMS

Petr Novák[1,2]

Adresa: [1]MFF UK v Praze, KMPS, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
[2]ÚTIA AV ČR, Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8

E-mail: [1]`novakp@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: Pozorujeme nezávislá zařízení podléhající opotřebení a pomocí vhodných regresních modelů se snažíme popsat vliv jejich průběžných oprav a údržby na rozdělení doby do selhání. Nejčastěji používané modely, jako je Coxův model proporcionálního rizika nebo model zrychleného času, popisují vliv regresorů na určitou základní rizikovou funkci. Tu je potřeba buď vhodně parametrizovat, nebo odhadnout neparametricky. V této práci se zaměřujeme na metody porovnávání a testování hypotéz o tvaru základního rizika v modelech oprav a předvádíme jejich využití.

Klíčová slova: Analýza spolehlivosti, modely oprav, regrese, základní riziko.

Abstract: When observing independent devices which are subject to degradation, we want to describe the influence of repairs and preventive maintenance actions on the time to failure distribution with the help of suitable regression models. Commonly used models, as the Cox proportional hazards and the accelerated failure time model assume, that the covariates influence a certain baseline hazard function, which must be either parametrized or estimated nonparametrically. In this work we focus on methods how to estimate and test hypotheses about the shape of the baseline hazard and we show their applications.

Keywords: Reliability analysis, repair models, regression, baseline hazard.

1. Úvod – údržba a opravy

Zkoumáme data reprezentující životnost n nezávislých systémů podléhajících opotřebení. Když se systém porouchá, je nutné provést opravu. Selhání se také snažíme předejít preventivními údržbami. Označíme T_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n_i$ seřazené časy oprav a údržeb i-tého zařízení a Δ_{ij} indikátory, zda na i-tém zařízení byla v j-tém čase provedena oprava ($\Delta_{ij} = 1$) nebo preventivní údržba ($\Delta_{ij} = 0$). Zavedeme čítací procesy oprav a údržeb do času t:

$$N_{i\bullet}(t) = \sum_{j=1}^{n_i} I(T_{ij} \leq t, \Delta_{ij} = 1), \quad M_{i\bullet}(t) = \sum_{j=1}^{n_i} I(T_{ij} \leq t, \Delta_{ij} = 0).$$

Označíme rizikové funkce pro každé zařízení

$$\lambda_i(t) = \lim_{h \to 0} P(N_{i\bullet}(t+h) - N_{i\bullet}(t) \geq 1 | \mathcal{H}(t))/h,$$

kde $\mathcal{H}(t)$ značí historii událostí do času t. Pracujeme s kumulovanými rizikovými funkcemi $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s)\mathrm{d}s$, příslušnými funkcemi přežití $S_i(t) = \exp(-\Lambda_i(t))$ a hustotami $f_i(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_i(t)$. Věrohodnost lze přepsat jako

$$L = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{f_i(T_{ij}^-)}{S_i(T_{i(j-1)})} \right)^{\Delta_{ij}} \left(\frac{S_i(T_{ij})}{S_i(T_{i(j-1)})} \right)^{1-\Delta_{ij}} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i(T_{ij}^-)^{\Delta_{ij}} \cdot S_i(T_{in_i})$$

a log-věrohodnost má pak tvar

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \Delta_{ij} \log \lambda_i(T_{ij}^-) - \int_0^{T_{in_i}} \lambda_i(t)\mathrm{d}t.$$

Věrohodnost dat lze zapsat pomocí čítacích procesů. Zavedeme čítací procesy pro j-té selhání či opravu i-tého zařízení a příslušný indikátor rizika

$$N_{ij}(t) = \Delta_{ij} I(T_{ij} \leq t), \quad M_{ij}(t) = (1 - \Delta_{ij}) I(T_{ij} \leq t),$$
$$Y_{ij}(t) = I(T_{i,j-1} < t \leq T_{ij}).$$

Dostaneme

$$l = \sum_{ij} \int_0^{\infty} \left(\log \lambda_i(t^-)\mathrm{d}N_{ij}(t) - Y_{ij}(t)\lambda_i(t^-)\mathrm{d}t \right).$$

2. Regresní modely oprav

2.1. Coxův model proporcionálního rizika

Předpokládáme, že každá oprava či údržba multiplikativně sníží nebo zvýší riziko, vliv mohou mít i případné další regresory, ozn. $Z_i(t)$. Uvažujeme rizikovou funkci [1]

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(t) \mathrm{e}^{M_{i\bullet}(t)\rho + N_{i\bullet}(t)\varphi + Z_i^T(t)\beta}.$$

Při parametrickém základním riziku lze dosadit do logaritmické věrohodnosti a maximalizovat. Považujme ale základní riziko za neznámé. Označíme $\boldsymbol{\beta} = (\rho, \varphi, \beta)^T$ a $\boldsymbol{X}_i^T(t) = (N_{i\bullet}(t), M_{i\bullet}(t), Z_i^T(t))$. Skóre, získané dosazením rizikové funkce do logaritmické věrohodnosti a derivováním podle parametrů, $U(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}} l$, závisí na neznámé $\Lambda_0(t)$, kterou nahradíme odhadem Nelson--Aalenova typu

$$\widehat{\Lambda}_0(t, \boldsymbol{\beta}) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}N_{\bullet\bullet}(s)}{\sum_{ij} \mathrm{e}^{\boldsymbol{X}_i^T(s^-)\boldsymbol{\beta}} Y_{ij}(s)},$$

kde $\bullet$ značí součet přes příslušný index. Po dosazení získáme skóre ve tvaru

$$\widehat{U}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{ij} \int_0^\infty \left(\boldsymbol{X}_i(t^-) - \frac{\sum_{kl} \boldsymbol{X}_k(t^-) \mathrm{e}^{\boldsymbol{X}_k^T(t^-)\boldsymbol{\beta}} Y_{kl}(t)}{\sum_{kl} \mathrm{e}^{\boldsymbol{X}_k^T(t^-)\boldsymbol{\beta}} Y_{kl}(t)} \right) \mathrm{d}N_{ij}(t)$$

a pro nalezení odhadů parametrů řešíme rovnice $\widehat{U}(\boldsymbol{\beta}) = 0$.

2.2. Model zrychleného času

Můžeme také předpokládat, že každá oprava či údržba a regresory způsobí, že virtuální čas plyne pomaleji nebo rychleji (Accelerated Failure Time model, AFT). Využijeme transformaci času [2]:

$$t \to \int_0^t \mathrm{e}^{M_{i\bullet}(s)\rho + N_{i\bullet}(s)\varphi + Z_i^T(s)\beta} \mathrm{d}s =: h_i(t, \boldsymbol{\beta}).$$

Riziková fukce pak má tvar

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(h_i(t, \boldsymbol{\beta})) \mathrm{e}^{M_{i\bullet}(t)\rho + N_{i\bullet}(t)\varphi + Z_i^T(t)\beta}.$$

Pokud základní riziková funkce bude konstantní, tedy odpovídající exponenciálnímu rozdělení, oba modely splývají. Zavedeme transformované procesy

$$\begin{aligned} N_{ij}^*(t, \boldsymbol{\beta}) &= \Delta_{ij} I(h_i(T_{ij}, \boldsymbol{\beta}) \le t), \quad M_{ij}^*(t, \boldsymbol{\beta}) = (1 - \Delta_{ij}) I(h_i(T_{ij}, \boldsymbol{\beta}) \le t), \\ Y_{ij}^*(t, \boldsymbol{\beta}) &= I(h_i(T_{i,j-1}, \boldsymbol{\beta}) < t \le h_i(T_{ij}, \boldsymbol{\beta})), \quad \boldsymbol{X}_i^*(t, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}_i(h_i^{-1}(t, \boldsymbol{\beta})). \end{aligned}$$

Přesné skóre má složitější tvar, je ale možné jej nahradit přibližným [2] a opět dosadit Nelson-Aalenův odhad kumulovaného základního rizika

$$\widehat{\Lambda}_0(t, \boldsymbol{\beta}) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}N_{\bullet\bullet}^*(s, \boldsymbol{\beta})}{\sum_{ij} Y_{ij}^*(t, \boldsymbol{\beta})}.$$

Získáme

$$\widetilde{U}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{ij} \int_0^\infty \left(\boldsymbol{X}_i^*(t^-, \boldsymbol{\beta}) - \frac{\sum_{kl} \boldsymbol{X}_k^*(t^-, \boldsymbol{\beta}) Y_{kl}^*(t, \boldsymbol{\beta})}{\sum_{kl} Y_{kl}^*(t, \boldsymbol{\beta})} \right) \mathrm{d}N_{ij}^*(t, \boldsymbol{\beta}).$$

Protože skóre není spojité v $\boldsymbol{\beta}$, najdeme odhady parametrů minimalizací $\|\widetilde{U}(\boldsymbol{\beta})\|$.

3. Vlastnosti odhadů Λ_0

Navážeme zde na [3], kde bylo hlavním cílem hledání a interpretace odhadů $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, a zaměříme se na studování vlastností odhadů kumulovaného základního rizika. Pro každý z modelů zvlášť uvažujme proces

$$W(t) = n^{1/2}\big(\widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \Lambda_0(t)\big).$$

Pomocí funkcionální centrální limitní věty [4] se dá ukázat, že pro $n \to \infty$ konverguje $W(t)$ slabě ke Gaussovskému procesu s nulovou střední hodnotou a konečnou kovarianční funkcí. Tím je zajištěna konzistence Nelson--Aalenových odhadů. Kovarianční funkce je pro každý z modelů různá. V AFT modelu závisí na neznámých λ_0 a $\lambda_0' = \mathrm{d}\lambda_0/\mathrm{d}t$ a není možné ji snadno odhadnout přímo. Předvedeme postup pomocí simulační metody.

Resampling zákadního rizika

Nejprve uvažujme Coxův model. Generujme $G_1, \ldots, G_n$ (i.i.d.) z $N(0,1)$. Mějme

$$\widehat{U}_G(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{ij} \int_0^\infty \left(\boldsymbol{X}_i(t^-) - \frac{\sum_{kl} \boldsymbol{X}_k(t^-) \mathrm{e}^{\boldsymbol{X}_k^T(t^-)\boldsymbol{\beta}} Y_{kl}(t)}{\sum_{kl} \mathrm{e}^{\boldsymbol{X}_{ik}^T(t^-)\boldsymbol{\beta}} Y_{kl}(t)} \right) G_i \mathrm{d}N_{ij}(t).$$

Najdeme $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G$ jako řešení rovnice $\widehat{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G) = \widehat{U}_G(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ a položíme

$$\widehat{W}(t) = n^{1/2}\Big(\widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_G) + \widehat{\Lambda}_{0G}(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}})\Big),$$

kde

$$\widehat{\Lambda}_{0G}(t, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{ij} \int_0^t \frac{G_i \mathrm{d}N_{ij}(s)}{\sum_{kl} \mathrm{e}^{\boldsymbol{X}_k^T(s^-)\boldsymbol{\beta}} Y_{kl}(s)}.$$

Pomocí funkcionální CLV [4] se dá ukázat, že za platnosti Coxova modelu $\widehat{W}(t)$ konverguje slabě ke stejnému Gaussovskému procesu jako $W(t)$. Důkaz vychází z postupu pro Coxův model s rekurentními událostmi [5], přičemž je potřeba zohlednit použití oprav a údržeb jako regresorů.

V modelu zrychleného času postupujeme obdobně, vyrobíme replikované přibližné skóre

$$\widetilde{U}_G(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{ij} \int_0^\infty \left(\boldsymbol{X}_i^*(t^-) - \frac{\sum_{kl} \boldsymbol{X}_k^*(t^-) Y_{kl}^*(t)}{\sum_{kl} Y_{kl}^*(t, \boldsymbol{\beta})} \right) G_i \mathrm{d}N_{ij}^*(t),$$

najdeme $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G$ řešení rovnice $\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G) = \widetilde{U}_G(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ a položíme

$$\widehat{\Lambda}_{0G}(t, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{ij} \int_0^t \frac{G_i \mathrm{d}N_{ij}^*(s, \boldsymbol{\beta})}{\sum_{kl} Y_{kl}^*(s, \boldsymbol{\beta})}.$$

Potom stejně sestavený replikovaný proces $\widehat{W}(t)$ má opět stejnou limitu jako $W(t)$ v AFT modelu. Postup je založen na funkcionální CLV [4] a inferenci pro AFT model s rekurentními událostmi [6].

Když tedy zreplikujeme mnohokrát $\widehat{W}(t)$, můžeme empiricky odhadnout rozptyl $W(t)$ a spočítat bodové konfidenční intervaly kumulovaného rizika jako

$$\widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \pm u_{1-\alpha/2} n^{-1/2} \sqrt{\widehat{\mathrm{var}} \widehat{W}(t)},$$

nebo pomocí log-transformace jako $\widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \exp \left(\pm u_{1-\alpha/2} n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{\mathrm{var}} \widehat{W}(t)}{\widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}})}} \right)$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je příslušný kvantil $N(0,1)$.

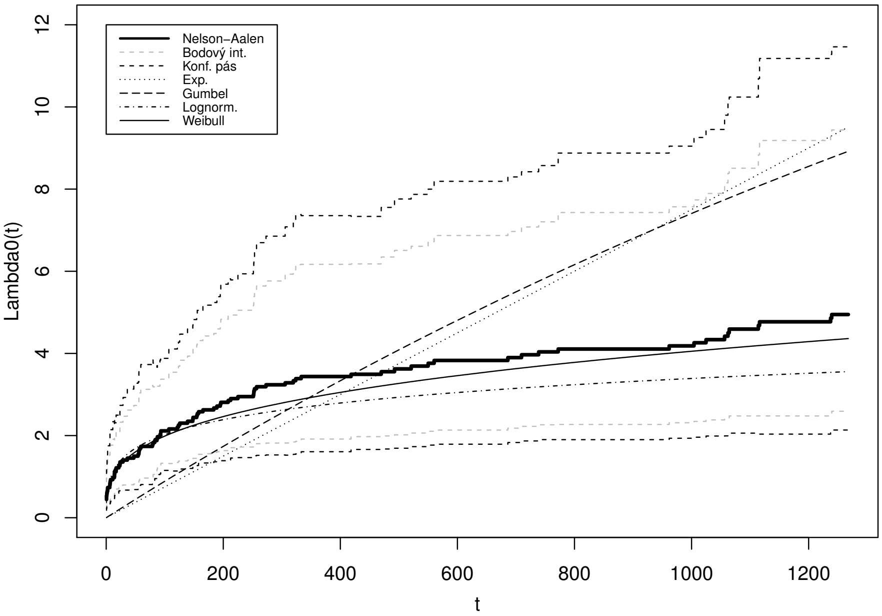
Testování hypotéz o tvaru základního rizika

Chceme-li testovat hypotézy o tvaru celého rizika, je potřeba najít příslušný konfidenční pás pro supremový test. Najdeme $q_{1-\alpha}$ vyběrový $1-\alpha$ kvantil generovaných hodnot $\sup_{[\tau_1, \tau_2]} \left| \frac{\widehat{W}(t)}{\widehat{\mathrm{var}} \widehat{W}(t)} \right|$ kde $[\tau_1, \tau_2]$ pokrývá zkoumanou část časového intervalu a spočítáme konfidenční pás pomocí logaritmické transformace jako

$$\widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \exp \left(\pm q_{1-\alpha} n^{-1/2} \sqrt{\widehat{\mathrm{var}} \widehat{W}(t) / \widehat{\Lambda}_0(t, \widehat{\boldsymbol{\beta}})} \right).$$

Hypotézu zamítáme, pokud testovaná kumulovaná základní riziková funkce neleží v konfidenčním pásu. Na Obrázku 1 vidíme příklad Nelson-Aalenova odhadu (tučně černě) pro data o rozsahu $n = 20$ z Coxova modelu s $\varphi = 1/10$, $\rho = -1/10$ a Weibullovým základním rozdělením s $a = 1/2$ a $\lambda = 1/10$.

Dále jsou zobrazeny příslušné bodové intervaly spolehlivosti (čárkovaně šedě), konfidenční pás (čárkovaně černě) a parametrické odhady pro různá rozdělení (šedě). V tomto případě bychom jasně zamítali exponenciální rozdělení, kde kumulovaná riziková funkce tvoří přímku (tečkovaně), i Gumbelovo rozdělení (čárkovaně). Naopak parametrický odhad původního Weibullova rozdělení (plně) je Nelson-Aalenovu odhadu velmi blízko, nezamítali bychom patrně ani lognormální rozdělení (čerchovaně).



Obrázek 1: Porovnání Nelson-Aalenova odhadu, konfidenčních mezí a parametrických odhadů kumulované rizikové funkce.

4. Simulační studie

Generovali jsme data z Coxova i AFT modelu o velikosti $n = 20$ a $n = 50$ s různými základními rizikovými funkcemi a parametry. Každé zařízení bylo sledováno do desáté události, údržba byla prováděna náhodně se stejným základním rozdělením. Parametry jsme stanovili tak, aby oprava zvýšila riziko či zrychlila čas ($\varphi = 1/10$) a údržba naopak ($\rho = -1/10$), jiné kovariáty nebyly uvažovány.

Tabulka 1: Podíl zamítnutých hypotéz o tvaru základního rizika při generování dat z různých rozdělení.

	Generované rozdělení				Testované rozdělení – podíl zamítnutí			
Model	λ_0	λ	a	n	Exp.	Weibull	Gumbel	LN
Cox	Weibull	1/10	5	20	0,908	0	0	0,216
				50	1	0	0	0,276
	Weibull	1/10	1/2	20	0,934	0	0,916	0,036
				50	1	0	1	0,134
	Gumbel	1/10	1,2	20	0,096	0,008	0	0,272
				50	0,642	0,020	0	0,640
	LN	μ=2	σ^2=4	20	0,992	0	1	0
				50	1	0,082	1	0
AFT	Weibull	1/10	5	20	0,912	0,006	0,008	0,066
				50	1	0	0	0,492
	Weibull	1/10	1/2	20	0,904	0,002	0,796	0,088
				50	1	0	1	0,644
	Gumbel	1/10	1,2	20	0,372	0,014	0,008	0,592
				50	0,990	0,050	0	0,994
	LN	μ=2	σ^2=4	20	0,996	0,142	0,878	0,092
				50	1	0,022	1	0

Testovali jsme na hladině $\alpha = 0{,}05$, zda je základní rozdělení exponenciální, Weibullovo $\lambda(t) = a\lambda^a t^{a-1}$, useknuté Gumbelovo $\lambda(t) = \lambda a^t$ či lognormální (LN) s parametry odhadnutými metodou maximální věrohodnosti původního modelu považovanými za pevné a sledovali jsme podíl zamítnutých hypotéz. Každý případ byl simulován 500×, testovali jsme na intervalu mezi 5% a 95% kvantilem generovaných dat. $\widehat{W}(t)$ bylo počítáno ze 40 replikací.

Z tabulky výsledků 1 je patrné, že testy jsou s vyšším počtem pozorovaných zařízení přesnější, tj. nezamítají původní a zamítají ostatní základní rozdělení. U dat s Weibullovým základním rozdělením záleží, zda je Λ_0 konvexní či konkávní, podle toho je spíše zaměnitelné s Gumbelovým nebo lognormálním rozdělením. Exponenciální rozdělení je zamítáno skoro vždy – zde se nabízí srovnání s parametrickým testem zda $a = 1$ ve Weibullově rozdělení.

5. Závěr

Zkoumali jsme metody pro testování hypotéz o tvaru základního rizika při modelování vlivu údržby a oprav na životnost sledovaného zařízení. Pro data z Coxova modelu i modelu zrychleného času jsme představili asymptotický test založený na resamplingu a na simulovaných datech zkoumali jeho vlastnosti v různých situacích. Dalším krokem může být zohlednění variability testovaných parametrických odhadů.

Poděkování

Tato práce byla podporována granty SVV 260105/2014 a GAUK 11122/2013.

Literatura

[1] Percy D. F., Alkali B. M.: Generalized proportional intensities models for repairable systems. *IMA Journal of Management Mathematics* **17**, 171–185, 2005.

[2] Lin D. Y., Ying Z.: Semiparametric inference for the accelerated life model with time-dependent covariates. *Journal od Statistical Planning and Inference* **44**, 47–63, 1995.

[3] Novák P.: Regrese v modelech oprav. *Informační bulletin České statistické společnosti* **24** (3–4), 83–88, 2013.

[4] Pollard D.: *Empirical Processes: Theory and Applications.* Hayward, California, 1990.

[5] Lin D. Y., Wei L. J., Ying Z.: Checking the Cox model with cumulative sums of martingale-based residuals. *Biometrika* **80**, 557–572, 1993.

[6] Lin D. Y., Wei L. J., Ying Z.: Accelerated failure time models for counting processes. *Biometrika* **85**, 605–618, 1998.