Akademie věd České republiky
Ústav teorie informace a automatizace, v.v.i.

Academy of Sciences of the Czech Republic
Institute of Information Theory and Automation

VÝZKUMNÁ ZPRÁVA

Přikryl, J.

Model oblasti pro projekt NOMŘÍZ

Výzkumná zpráva

č. 2341 prosinec 2013

TA01030603

ÚTIA AV ČR, P.O.Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic
Tel: (+420)266052422, Fax: (+420)286890378,
Url: http://www.utia.cas.cz, E-mail: utia@utia.cas.cz

Abstrakt
Tento dokument popisuje základní stavový model oblasti, používaný v aktualizované verzi algoritmu řízení (HRŠD) pro projekt NOMŘÍZ. Dokument je zkrácenou a neredigovanou verzí interního neveřejného implementačního dokumentu určeného pro interní potřebu ÚTIA a ELTODO a.s.

Klíčová slova: světelné signalizační zařízení, dopravní řízení, stavový model.

1 Původní model pro jeden pruh

Původní stavový model, navržený Ivanem Nagym [1] resp. Jitkou Homolovou [2] (ty dva modely se liší v rovnici pozorování, dokumentované to pokud vím je jenom velmi zhruba) vypadá v maticové formě následovně:

$$\begin{pmatrix} \xi[k+1] \\ O[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \kappa & \beta \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \xi[k] \\ O[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\delta S_\mathrm{c} - (1-\delta) I_\mathrm{c}[k] \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} z[k] + \underbrace{\begin{pmatrix} I_\mathrm{c}[k] \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

V tomto modelu jsou konstantní saturovaný tok S_c i vstupní intenzita vozidel v k-tém časovém kroku $I_\mathrm{c}[k]$ vztaženy na délku tohoto kroku, tedy na jeden cyklus o délce T_c sekund. Příznak δ označuje přítomnost přetrvávající fronty (angl. *overflow queue*, tedy fronty, která se nevyprázdní za jeden cyklus).

Rovnice pro výstup potom předpovídá měřené hodnoty výstupních intenzit a obsazeností jako

$$\begin{pmatrix} y_\mathrm{c}[k] \\ O[k] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \xi[k] \\ O[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \delta S_\mathrm{c} + (1-\delta) I_\mathrm{c}[k] \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} z[k].$$

2 Model pro jeden pruh zohledňující délku cyklu

V případě, že uvažujeme proměnnou délku cyklu, existují z modelovacího hlediska dvě možnosti: (a) Nechat vše při starém a přepočítávat saturovaný tok S_c a vstup $I_\mathrm{c}[k]$ na aktuální délku cyklu signalizace T_c, případně (b) počítat s reálným hodinovým saturovaným tokem S, naměřenou hodinovou vstupní intenzitou $I[k]$ a reálnou délkou zelené $g[k]$ a přepočítávat je na správné hodnoty uvnitř modelu pomocí prodloužení vektoru řízení o hodnotu T_c. Volíme druhou variantu, neboť model je jednom polovinou celého systému a vazba na délku cyklu nám umožní pracovat s T_c při optimalizaci signálního plánu, v níž má délka cyklu vliv na rezervní kapacitu systému.

První průběžná varianta stavového modelu potom vypadá v maticové formě následovně:

$$\begin{pmatrix} \xi[k+1] \\ O[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \kappa & \beta \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \xi[k] \\ O[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\delta \frac{S}{3600} - (1-\delta) \frac{I[k]}{3600} & \frac{I[k]}{3600} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} g[k] \\ T_\mathrm{c}[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

Model výstupu bude mít v tomto případě tvar

$$\begin{pmatrix} y_\mathrm{c}[k] \\ O[k] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \xi[k] \\ O[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \delta\frac{S}{3600} + (1-\delta)\frac{I[k]}{3600} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{pmatrix} g[k] \\ T_\mathrm{c}[k] \end{pmatrix}.$$

Nevýhodou tohoto postupu je nekonzistence měřených veličin: vstupní toky $I[k]$ jsou [voz/hod], výstupní $y_\mathrm{c}[k]$ je bohužel pouze [voz], protože lineární model nám nedovolí modelovat z délky fronty výstupní hodinový tok (je potřeba dělit T_c).

2.1 Optimální délka cyklu

Jako optimální délku cyklu uvažujeme takový cyklus, jenž s určitou předem danou kapacitní rezervou udrží oblast na hranici saturace. Pokud roste poptávka po dopravě a rostou fronty, při konstantní délce cyklu v určitý okamžik už není ve fázovém diagramu prostor, kam prodloužit fáze, jejichž příslušné vjezdy jsou v saturaci – prostě proto, že narážíme na omezení z konfliktních směrů či na minimální délky fází, které musí figurovat v signálním plánu. V takovém okamžiku je třeba zvyšovat T_c.

3 Model pro jeden pruh zohledňující ofset

Optimální ofset signálního plánu je takový ofset, jenž zajistí vyprázdnění fronty čekajících vozidel před tím, než se do fronty vozidel začnou připojovat vozidla z nadřazených křižovatek.

Uvažujme jízdní pruh mezi křižovatkami A a B. Při délce tohoto jízdního pruhu d_{AB} metrů a průměrné rychlosti volného pohybu (*free-flow*) vozidla v_free metrů za sekundu bude vozidlům, vyjíždějícím z křižovatky A, trvat d/v sekund, než celý jízdní pruh projedou na stopčáru křižovatky B:

$$\tau_{AB} = \frac{d_{AB}}{v_\mathrm{free}}\,[\mathrm{s}]. \tag{1}$$

Zároveň přitom předpokládáme, že se fronta na křižovatce B vyprazdňuje objemovou rychlostí $\frac{S}{3600}$ vozidel za sekundu, což znamená, že se fronta vyprázdní za

$$\tau_{B,\mathrm{queue}} = \frac{S_B \cdot \xi_B[k]}{3600}\,[\mathrm{s}].$$

Signální plány námi uvažovaných řadičů fungují tak, že každý signální plán je určen délkou svých fází, a tato délka fází je pootočena o nějaký ofset, vztažený ke globálnímu referenčnímu času. Vezmeme-li křižovatku A jako referenční s nulovým ofsetem, a označíme začátky zelené $\tau_{A,0}$ pro křižovatku A a $\tau_{B,0} + \tau_{B,\text{offset}}$ pro křižovatku B, pak v čase $\tau_{B,0} + \tau_{B,\text{offset}} + \tau_{B,\text{queue}}$ mohou jízdním pruhem křižovatky B projíždět vozidla z křižovatky A bez zastavení až do konce zelené. Mělo by tedy platit

$$\begin{aligned} \tau_{A,0} + \tau_{AB} &= \tau_{B,0} + \tau_{B,\text{offset}} + \tau_{B,\text{queue}}, \\ \tau_{B,\text{offset}} &= \tau_{A,0} + \tau_{AB} - \tau_{B,0} - \frac{S_B \cdot \xi_B[k]}{3600}. \end{aligned} \tag{2}$$

Drobný problém je ovšem v tom, že komunikace jsou většinou obousměrné a že v takovém případě ofset na křižovatce B ovlivní i jízdu vozidel křižovatkou A v opačném směru. Mělo by tedy také zároveň platit, že

$$\begin{aligned} \tau_{A,0} + \tau_{A,\text{queue}} &= \tau_{B,0} + \tau_{B,\text{offset}} + \tau_{AB}, \\ \tau_{B,\text{offset}} &= \tau_{A,0} + \frac{S_A \cdot \xi_A[k]}{3600} - \tau_{B,0} - \tau_{AB}, \end{aligned} \tag{3}$$

přičemž obě hodnoty ofsetů, vypočtené v rovnicích (2) a (3), se budou lišit.

Co s tím? Je lepší uvažovat ,,dřívější" nebo ,,pozdější" variantu vypočteného ofsetu? Je lepší nechat vozidla v jednom směru přibrzdit a nebo riskovat, že nevyužitá kapacita výjezdu, způsobená posunutím ofsetu na pozdější hodnotu, způsobí nárůst fronty?

3.1 Ideální ofset z hlediska zpoždění

Jednou z variant je zavést ofset $\vartheta[k]$ jako další řídicí proměnnou, navrženou tak, aby minimalizovala zpoždění vozdel. Pro účely řízení v tom případě zavedeme do rozšířeného stavového vektoru ještě zpoždění $\psi[k]$, které pro daný jízdní pruh určíme jako dobu, kterou nově vstupující vozidla stráví čekáním ve frontě. Obdobně jako výše budeme považovat za ideální okamžik průjezdu stopčárou moment, kdy došlo k průjezdu posledního vozidla předchozí fronty. Pokud tedy začne v cyklu svítit zelená v čase $\tau_0[k]$, poslední vozidlo stávající fronty projede stopčárou orientačně v době

$$\tau_{\text{sb}}[k] \approx \tau_0[k] + \frac{S}{3600}\xi[k].$$

Pokud k tomu připočteme čas potřebný k průjezdu vozidel komunikací délky d_{AB}, bude při nulovém ofsetu zpoždění vjíždějících vozidel na daném jízdním pruhu rovno

$$\psi[k] \approx \tau_0[k] + \frac{S}{3600}\xi[k] - \frac{d_{AB}}{v_{\text{free}}} \tag{4}$$

a po zohlednění ofsetu

$$\psi[k] = \tau_0[k] + c \cdot \frac{S}{3600}\xi[k] - \vartheta[k] - \frac{d_{AB}}{v_{\text{free}}}, \tag{5}$$

a v případě více, než jednoho ramene na křižovatce potom

$$\psi[k] = \psi_1[k] + \psi_2[k] + \cdots + \psi_n[k] = -n \cdot \vartheta[k] + \sum_{i=1}^{n} \tau_{i,0}[k] + c \cdot \frac{S_i}{3600}\xi_i[k] - \frac{d_i}{v_{\text{free}}}, \qquad (6)$$

Expertně určená konstanta $c \in (0,1)$ v rovnici (5) kompenzuje pomalejší rozjezd fronty. Hodnota $\vartheta[k]$ se přitom vztahuje k celé křižovatce, zatímco hodnoty $\psi[k]$ se počítají pro jednotlivé jízdní pruhy. Při optimalizaci je jak $\vartheta[k]$, tak i $\psi[k]$ součástí rozšířeného stavového vektoru, pouze pro $\vartheta[k]$ nastavujeme nulové váhy – optimální hodnotu ofsetu vygeneruje optimalizační program na základě minimalizace hodnot $\psi[k]$ pro všechny jízdní pruhy.

V případě jednoho jízdního pruhu s jednou fází je $\tau_0[k] = 0$ a výsledná soustava rovnic má o něco zjednodušený tvar v následující formě:

$$\begin{pmatrix} \xi[k+1] \\ O[k+1] \\ \psi[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \kappa & \beta & 0 \\ c \cdot \frac{S}{3600} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \xi[k] \\ O[k] \\ \psi[k] \end{pmatrix}$$
$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} -\delta\frac{S}{3600} - (1-\delta)\frac{I[k]}{3600} & 0 & \frac{I[k]}{3600} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} g[k] \\ \vartheta[k] \\ T_{\text{c}}[k] \end{pmatrix}$$
$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\frac{d_{AB}}{v_{\text{free}}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

V případě, že modelovaný systém bude jedna křižovatka s třemi jízdními pruhy a dvěma fázemi F1 a F2, tvar matic se o něco zomplikuje. Pro fázi F1 sice stále platí $\tau_{0,\text{F1}}[k] = 0$, ale pro fázi F2 se posouvá začátek signálu ,,volno“. V obecném případě je přibližný počátek zelené

$$\begin{aligned} \tau_{0,\text{F1}}[k] &= 0, \\ \tau_{0,\text{F2}}[k] &= g_{\text{F1}}[k], \\ \tau_{0,\text{F3}}[k] &= g_{\text{F1}}[k] + g_{\text{F2}}[k], \\ \tau_{0,\text{F4}}[k] &= g_{\text{F1}}[k] + g_{\text{F2}}[k] + g_{\text{F3}}[k], \\ &\vdots \end{aligned}$$

přičemž začátky signálu ,,volno“ v jízdních pruzích jsou dány začátky fází, odpovídajících daným jízdním pruhům (je to určeno jenom přibližně, signální skupiny v pro jednotlivé jízdní pruhy mohou začínat nepatrně později). Pro naši hypotetickou křižovatku se třemi jízdními pruhy a dvěma fázemi budeme uvažovat, že jízdní pruh č. 1 jede ve fázi F1 a jízdní pruhy 2 a 3 ve fázi F2. Začátky signálu volno v jízdních pruzích budou tedy

$$\begin{aligned}\tau_{01}[k] &= \tau_{0,\mathrm{F1}}[k] = 0,\\ \tau_{02}[k] &= \tau_{0,\mathrm{F2}}[k] = g_{\mathrm{F1}}[k],\\ \tau_{03}[k] &= \tau_{0,\mathrm{F2}}[k] = g_{\mathrm{F1}}[k]\end{aligned}$$

a hodnota okamžitého zpoždění jako funkce offsetu bude analogicky s rovnicí (6)

$$\psi[k] = 2\,g_{\mathrm{F1}}[k] + \frac{c}{3600}S_1\xi_1[k] + \frac{c}{3600}S_2\xi_2[k] + \frac{c}{3600}S_3\xi_3[k] - 3\,\vartheta[k] - \frac{d_1+d_2+d_3}{v_{\mathrm{free}}}.$$

Model vývoje stavu bude pro tuto situaci bude potom vypadat takto:

$$\begin{pmatrix}\xi_1[k+1]\\ \xi_2[k+1]\\ \xi_3[k+1]\\ O_1[k+1]\\ O_2[k+1]\\ O_3[k+1]\\ \psi[k+1]\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\delta_1[k] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \delta_2[k] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta_3[k] & 0 & 0 & 0 & 0\\ \kappa_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 & 0 & \beta_3 & 0\\ c\cdot\frac{S_1}{3600} & c\cdot\frac{S_2}{3600} & c\cdot\frac{S_3}{3600} & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix}\xi_1[k]\\ \xi_2[k]\\ \xi_3[k]\\ O_1[k]\\ O_2[k]\\ O_3[k]\\ \psi[k]\end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{\phi(\delta_1[k],S_1,I_1[k])}{3600} & 0 & 0 & \frac{I_1[k]}{3600}\\ 0 & -\frac{\phi(\delta_2[k],S_2,I_2[k])}{3600} & 0 & \frac{I_2[k]}{3600}\\ 0 & -\frac{\phi(\delta_3[k],S_3,I_3[k])}{3600} & 0 & \frac{I_3[k]}{3600}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix}g_{\mathrm{F1}}[k]\\ g_{\mathrm{F2}}[k]\\ \vartheta[k]\\ T_{\mathrm{c}}[k]\end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ -\frac{d_1+d_2+d_3}{v_{\mathrm{free}}}\end{pmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

Jeho generalizace pro obecný počet jízdních pruhů l, křižovatek j, a fází f bude

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}[k+1] \\ \mathbf{o}[k+1] \\ \boldsymbol{\psi}[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_{l\times l}[k] & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{l\times l} & \boldsymbol{\Upsilon}_{l\times l} & 0 \\ \mathbf{S}_{j\times l} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}[k] \\ \mathbf{o}[k] \\ \boldsymbol{\psi}[k] \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{l\times f}[k] & 0 & \boldsymbol{\rho}_{l\times 1}[k] \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_{j\times f} & \mathbf{U}_{j\times j} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{g}[k] \\ \boldsymbol{\vartheta}[k] \\ T_{\mathrm{c}}[k] \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_{l\times 1} \\ \mathbf{d}_{j\times 1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

V této generalizaci je matice $\mathbf{A}$ sestavena z následujících submatic:

$$\boldsymbol{\Delta}_{l\times l}[k] = \begin{pmatrix} \delta_1[k] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_1[k] & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_l[k] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{l\times l} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_l \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{l\times l} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_l \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{j\times l} = \frac{c}{3600} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{s}_j \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{s}_i = [S_{l(i,1)}, S_{l(i,2)}, \ldots, S_{l(i,\max)}]$$

a matice $\mathbf{B}$ je sestavena z

$$\boldsymbol{\Phi}_{l\times f}[k] = \frac{1}{3600} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1[k] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_2[k] & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_f[k] \end{pmatrix},$$

$$\text{kde vektor } \boldsymbol{\phi}_i[k] = \begin{pmatrix} -\phi\left(\delta_{l(i,1)}[k], S_{l(i,1)}, I_{l(i,1)}[k]\right) \\ -\phi\left(\delta_{l(i,2)}[k], S_{l(i,2)}, I_{l(i,2)}[k]\right) \\ \vdots \\ -\phi\left(\delta_{l(i,\max)}[k], S_{l(i,\max)}, I_{l(i,\max)}[k]\right) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\rho}_{l\times 1}[k] = \frac{1}{3600}\begin{pmatrix} I_1[k] \\ I_2[k] \\ \vdots \\ I_l[k] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{j\times f} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{t}_j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{j\times j} = -\begin{pmatrix} \mid \mathcal{L}_1 \mid & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mid \mathcal{L}_2 \mid & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mid \mathcal{L}_j \mid \end{pmatrix}$$

a vektor **F**

$$\boldsymbol{\lambda}_{l\times 1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}_{j\times 1} = -\frac{1}{v_{\text{free}}}\begin{pmatrix} d_{l(1,1)} + d_{l(1,2)} + \cdots + d_{l(1,\max)} \\ d_{l(2,1)} + d_{l(2,2)} + \cdots + d_{l(2,\max)} \\ \vdots \\ d_{l(j,1)} + d_{l(j,1)} + \cdots + d_{l(j,\max)} \end{pmatrix}$$

přičemž $\mathcal{L}_j$ označuje uspořádanou množinu všech indexů jízdních pruhů, jež příslusí křižovatce číslo j – bude-li tedy $\mathcal{L}_2 = \{6, 7, 10, 11, 12\}$, znamená to, že na křižovatka č. 2 modelované sítě spojuje jízdní pruhy č. 6, 7, 10, 11 a 12. Těmto jízdním pruhům pak příslusí saturované toky S_6, S_7, a tak dále, analogicky s ostatními indexovanými proměnnými. Jako $\mid \mathcal{L}_j \mid$ potom označujeme počet jízdních pruhů na dané křižovatce.

4 Rovnice pro výstup

V případě, že modelovaný systém bude stejně jako v minulém odstavci jedna křižovatka s třemi jízdními pruhy a dvěma fázemi F1 a F2, tvar matic ve výstupní rovnici bude

$$\begin{pmatrix} y_1[k+1] \\ y_2[k+1] \\ y_3[k+1] \\ O_1[k+1] \\ O_2[k+1] \\ O_3[k+1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11}(1-\delta_1[k]) & \alpha_{12}(1-\delta_2[k]) & \alpha_{13}(1-\delta_3[k]) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21}(1-\delta_1[k]) & \alpha_{22}(1-\delta_2[k]) & \alpha_{23}(1-\delta_3[k]) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31}(1-\delta_1[k]) & \alpha_{32}(1-\delta_2[k]) & \alpha_{33}(1-\delta_3[k]) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \xi_1[k] \\ \xi_2[k] \\ \xi_3[k] \\ O_1[k] \\ O_2[k] \\ O_3[k] \\ \psi[k] \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{l} \alpha_{1i}\phi_{i1}[k] & \sum_{i=1}^{l} \alpha_{1i}\phi_{i1}[k] & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^{l} \alpha_{2i}\phi_{i1}[k] & \sum_{i=1}^{l} \alpha_{1i}\phi_{i1}[k] & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^{l} \alpha_{2i}\phi_{i1}[k] & \sum_{i=1}^{l} \alpha_{1i}\phi_{i1}[k] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{pmatrix} g_{\mathrm{F1}}[k] \\ g_{\mathrm{F2}}[k] \\ \vartheta[k] \\ T_{\mathrm{c}}[k] \end{pmatrix}.$$

doplnit výpočet $\phi_{ij}[k]$

5 Syntéza řízení

Oproti původnímu modelu Homolové a Nagyho, použitému v systému HŘSD, jsou v našem případě optimalizovanými veličinami doby zelené $\mathbf{g}[k]$, offsetu $\boldsymbol{\vartheta}[k]$ a délka cyklu $T_{\mathrm{c}}[k]$. Stejně jako v případě HŘSD budeme za kritérium opimality brát minimum váženého součtu všech teoretických zpoždění ve všech jízdních pruzích křižovatek, řízených světelnou signalizací,

$$J = \sum_{i=1}^{l} w_i \frac{\xi_i[k]}{S_i}.$$

Stejně jako v případě HŘSD budeme optimalizovat pomocí lineárního programování, tedy

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj } & \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\chi} \\ \text{za podmínek } & \mathbf{P}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{r} && (7) \\ \text{a } & \mathbf{Q}\boldsymbol{\chi} \leq \mathbf{s} && (8) \end{aligned}$$

$$\text{a } \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{lb}} \leq \boldsymbol{\chi} \leq \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{ub}}. \tag{9}$$

Do stavového vektoru lineárního programování $\boldsymbol{\chi}$ musíme zahrnout všechny modelované i řídicí veličiny na celém horizontu řízení délky h kroků kromě obsazenosti, tak je důležitá pro odhad stavu, ale pro syntézu nového řízení se obejdeme bez ní. Volíme tedy

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}[k+h+1] \\ \mathbf{u}[k] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k+h] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}[k+1] \\ \boldsymbol{\psi}[k+1] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}[k+h+1] \\ \boldsymbol{\psi}[k+h+1] \\ \mathbf{g}[k] \\ \boldsymbol{\vartheta}[k] \\ T_{\mathrm{c}}[k] \\ \vdots \\ \mathbf{g}[k+h] \\ \boldsymbol{\vartheta}[k+h] \\ T_{\mathrm{c}}[k+h] \end{pmatrix},$$

přičemž důvod pro posun hodnot stavového vektoru lineárního modelu oproti hodnotám vstupů je dán podmínkou (7).

5.1 Podmínka $\mathrm{P}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{r}$

Matice $\mathbf{P}$ a vektor $\mathbf{r}$ v podmínce (7) se skládají ze dvou komponent – jednak tato podmínka musí obsahovat rovnice vývoje stavu pro výpočet predikcí $\mathbf{x}[k+1]$ až $\mathbf{x}[k+h+1]$ podle hodnot řídicích veličin $\mathbf{u}[k]$ až $\mathbf{u}[k+h]$, druhá část podmínky potom zaručuje, že součet délek fází a mezičasů na každé křižovatce bude roven délce cyklu. Formát matice $\mathbf{P}$ a vektoru $\mathbf{r}$ v podmínce (7) bude tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathrm{state}} \\ \mathbf{P}_{\mathrm{green}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\mathrm{state}} \\ \mathbf{r}_{\mathrm{green}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

5.1.1 Vývoj stavu

Odvodit podmínku pro vývoj stavu v rocnici (10) lze několika postupy z původní rovnice vývoje stavu zapsané pro predikci stavů $\mathbf{x}[k+1]$ až $\mathbf{x}[k+h+1]$ pomocí známé hodnoty korigovaného stavu $\hat{\mathbf{x}}[k]$ (jde o korekci $\mathbf{x}[k]$ pomocí statistické filtrace na základě naměřených dat) a nějakého zvoleného řízení $\mathbf{u}[k]$ až $\mathbf{u}[k+h]$ (to je řízení, které chceme navrhnout).

Původní verze podle Homolové Toto je postup, který zvolila Jitka Homolová pro optimalizaci řízení na horizontu ve své disertační práci. Jitka ve svém modelu sestavuje podmínku $\mathbf{P}_{\text{state}}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{r}_{\text{state}}$ z rozvinuté soustavy rovnic vývoje stavu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{F}\\
\mathbf{x}[k+2] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k+1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] + \mathbf{F}\\
\mathbf{x}[k+3] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k+2] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+2] + \mathbf{F}\\
&\vdots\\
\mathbf{x}[k+h+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k+h] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+h] + \mathbf{F},
\end{aligned}
$$

kde napřed převede všechny modelované stavy vlevo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{F}\\
\mathbf{x}[k+2] - \mathbf{A}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] + \mathbf{F}\\
\mathbf{x}[k+3] - \mathbf{A}\mathbf{x}[k+2] &= \mathbf{B}\mathbf{u}[k+2] + \mathbf{F}\\
&\vdots\\
\mathbf{x}[k+h+1] - \mathbf{A}\mathbf{x}[k+h] &= \mathbf{B}\mathbf{u}[k+h] + \mathbf{F},
\end{aligned}
$$

pak celou soustavu soustav sloučí do jedné

$$
\mathbf{R}_{\text{d}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}[k+2] \\ \mathbf{x}[k+3] \\ \vdots \\ \mathbf{x}[k+h+1] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{p}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}[k] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_{\text{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{u}[k+1] \\ \mathbf{u}[k+2] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k+h] \end{pmatrix} + \mathbf{F}_{\text{p}}
$$

a aby se zbavila diagonální matice $\mathbf{R}_{\text{d}}$ na levé straně, násobí celou soustavu inverzí $\mathbf{R}_{\text{d}}^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\text{pp}} &= \mathbf{R}_{\text{d}}^{-1}\mathbf{A}_{\text{p}}\\
\mathbf{B}_{\text{pp}} &= \mathbf{R}_{\text{d}}^{-1}\mathbf{B}_{\text{p}}\\
\mathbf{F}_{\text{pp}} &= \mathbf{R}_{\text{d}}^{-1}\mathbf{F}_{\text{p}},
\end{aligned}
$$

čímž dostane

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}[k+2] \\ \mathbf{x}[k+3] \\ \vdots \\ \mathbf{x}[k+h+1] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{pp}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}[k] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_{\text{pp}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{u}[k+1] \\ \mathbf{u}[k+2] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k+h] \end{pmatrix} + \mathbf{F}_{\text{pp}}.
$$

V dalším kroku se převede vše optimalizované (tedy predikce stavů $\mathbf{x}[k+1]$ až $\mathbf{x}[k+h+1]$ a řízení $\mathbf{u}[k]$ až $\mathbf{u}[k+h]$) doleva

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}[k+2] \\ \mathbf{x}[k+3] \\ \vdots \\ \mathbf{x}[k+h+1] \end{pmatrix} - \mathbf{B}_{\mathrm{pp}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{u}[k+1] \\ \mathbf{u}[k+2] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k+h] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\mathrm{pp}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}[k] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{F}_{\mathrm{pp}}$$

a po transformaci

$$\mathbf{P}_{\mathrm{state}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{r}_{\mathrm{state}} = \mathbf{A}_{\mathrm{pp}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}[k] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{F}_{\mathrm{pp}}.$$

U této verze zápisu podmínky pro vývoj stavu mne zaráží hlavně nutnost počítat vždycky inverzi matice $\mathbf{R}_{\mathrm{d}}$. Bohužel zatím nemám vůbec představu, proč se tak děje.

Verze bez vazby mezi sousedními horizonty Další varianta, jak podmínku sestavit, spočívá v rozvinutí pravé strany dílčích soustav rovnic tak, aby se zde vyskytovaly pouze známé hodnoty stavu,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{F}, \\
\mathbf{x}[k+2] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k+1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] + \mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] + \mathbf{F} \\
\mathbf{x}[k+3] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k+2] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+2] + \mathbf{F} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] + \mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+2] + \mathbf{F} \\
&\vdots \\
\mathbf{x}[k+h+1] &= \mathbf{A}^{h+1}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{A}^{h}\mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{A}^{h}\mathbf{F} + \cdots + \mathbf{B}\mathbf{u}[k+h] + \mathbf{F}
\end{aligned}$$

kde po převedení všech prvků stavového vektoru lineárního programování na levou stanu obdržíme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{B}\mathbf{u}[k] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{F}, \\
\mathbf{x}[k+2] - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}[k] - \mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{F} \\
\mathbf{x}[k+3] - \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}[k] - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] - \mathbf{B}\mathbf{u}[k+2] &= \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{F} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}[k+h+1] - \mathbf{A}^h\mathbf{B}\mathbf{u}[k]-\\
-\mathbf{A}^{h-1}\mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] - \cdots - \mathbf{B}\mathbf{u}[k+h] &= \mathbf{A}^{h+1}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{A}^h\mathbf{F} + \mathbf{A}^{h-1}\mathbf{F} + \cdots + \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

Tuto soustavu soustav lineárních rovnic můžeme pomocí dílčích matic původní soustavy zapsat jako

$$
\mathbf{P}_{\text{state}} = \begin{pmatrix}
\mathbf{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{B} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \mathbf{I} & 0 & & 0 & -\mathbf{AB} & -\mathbf{B} & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{I} & & \vdots & -\mathbf{A}^2\mathbf{B} & -\mathbf{AB} & -\mathbf{B} & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{A}^h\mathbf{B} & -\mathbf{A}^{h-1}\mathbf{B} & \cdots & -\mathbf{AB} & -\mathbf{B}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{r}_{\text{state}} = \begin{pmatrix}
\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{F} \\
\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}[k]\mathbf{F} + \mathbf{AF} + \mathbf{F} \\
\mathbf{A}^3\hat{\mathbf{x}}[k]\mathbf{F} + (\mathbf{AA} + \mathbf{A} + 1)\mathbf{F} \\
\vdots \\
\mathbf{A}^{h+1}\hat{\mathbf{x}}[k] + (\mathbf{A}^h + \mathbf{A}^{h-1} + \cdots + 1)\mathbf{F}
\end{pmatrix}.
$$

Při tomto postupu ale musíme opakovaně mocnit hodnoty matice $\mathbf{A}$, což je jednak časově náročné, jednak může mít za následek numerické chyby.

Podmínka s vazbou mezi horizonty V tomto případě vycházíme ze soustavy rovnic vývoje stavu zapsané jako

$$
\begin{array}{rrrrr}
\mathbf{x}[k+1] & & -\mathbf{B}\mathbf{u}[k] & = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + & \mathbf{F} \\
\mathbf{x}[k+2] & -\mathbf{A}\mathbf{x}[k+1] & -\mathbf{B}\mathbf{u}[k+1] & = & \mathbf{F} \\
 & & & \vdots & \mathbf{F} \\
\mathbf{x}[k+h+1] & -\mathbf{A}\mathbf{x}[k+h] & -\mathbf{B}\mathbf{u}[k+h] & = & \mathbf{F}.
\end{array}
$$

Pro první řádek soustavy máme v maticové formě

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{I} & | -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{u}[k] \end{pmatrix} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{F},
$$

přičemž jednotková matice má rozměry $\mathbf{I}_{(2l+j)\times(2l+j)}$ a $\mathbf{B}_{(2l+j)\times(f+j+1)}$. Pro první dva řádky potom

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{A} & \mathbf{I} & 0 & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}[k+2] \\ \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{u}[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix},
$$

což po rozšíření

$$\mathbf{P}_{\mathrm{state}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{A} & \mathbf{I} & & 0 & 0 & -\mathbf{B} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mathbf{A} & \mathbf{I} & 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{state}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Rozměry matic jsou (pro kontrolu) $\mathbf{I}_{(2l+j)\times(2l+j)}$ a $\mathbf{B}_{(2l+j)\times(f+j+1)}$.

5.1.2 Požadavek na součet délek fází

Další omezující podmínkou na rovnost v našem systému je součet délek jednotlivých fází, pro který platí u každé křižovatky vztah

$$g_{\mathrm{F1}}[k] + g_{\mathrm{F2}}[k] + \cdots + g_{\mathrm{Fn}}[k] + \tau_{\mathrm{dead}} = T_{\mathrm{c}}[k],$$

jenž vzhledem k tomu, že i délka cyklu je součástí stavu, musíme upravit na

$$-g_{\mathrm{F1}}[k] - g_{\mathrm{F2}}[k] - \cdots - g_{\mathrm{Fn}}[k] + T_{\mathrm{c}}[k] = \tau_{\mathrm{dead}} \tag{11}$$

a v maticové formě pro všech j křižovatek potom

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \boldsymbol{\gamma}_2 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\gamma}_j & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \tau_{\mathrm{dead},1} \\ \tau_{\mathrm{dead},2} \\ \vdots \\ \tau_{\mathrm{dead},j} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

kde řádkové vektory $\boldsymbol{\gamma}_1$ odpovídají zeleným $g_{\mathrm{Fx}}[k]$ v rovnici (11), $\boldsymbol{\gamma}_i = (-1, -1, \ldots, -1)$. Ze vztahu (12) tak plyne

$$\mathbf{P}_{\mathrm{green}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \boldsymbol{\gamma}_2 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\gamma}_j & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{green}} = \begin{pmatrix} \tau_{\mathrm{dead},1} \\ \tau_{\mathrm{dead},2} \\ \vdots \\ \tau_{\mathrm{dead},j} \end{pmatrix}$$

5.2 Podmínka $\mathbf{Q}\boldsymbol{\chi} \leq \mathbf{s}$

Podmínka (8) v případě optimalizace na horizontu h sestává z totožných skupin omezujících podmínek, vyjádřených pro horizonty $n = k+1, \ldots, k+h$. Tyto skupiny lze rozdělit do dvou základních bloků. Vznikne tak blok podmínek pro stavové proměnné a blok podmínek pro řídicí proměnné,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\text{state}} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{\text{ctrl}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{s} &= \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\text{state}} \\ \mathbf{s}_{\text{ctrl}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Tyto bloky stanovují pro každý horizont následující omezení pro stavové proměnné:

- Délky front jsou kladné a jsou omezeny maximální délkou pruhu

$$0 \leq \xi[n] \leq \xi_{\max}.$$

- Zpoždění vozidel jsou kladná,

$$0 \leq \psi[n].$$

Seznam omezujících podmínek pro řídicí proměnné je výrazně obsáhlejší:

- Délka cyklu $T_{\mathrm{c}}[n]$ se pohybuje v určitých mezích, daných minimální délkou cyklu $T_{\mathrm{c,min}}$ a maximální délkou cyklu $T_{\mathrm{c,max}}$, tedy

$$T_{\mathrm{c,min}} \leq T_{\mathrm{c}}[n] \leq T_{\mathrm{c,max}}.$$

  Běžně uvažujeme $T_{\mathrm{c,min}} = 60\,\mathrm{s}$ a $T_{\mathrm{c,max}} = 120\,\mathrm{s}$.

- Změna délky cyklu $T_{\mathrm{c}}[n]$ je také shora i zdola omezená,

$$T_{\mathrm{c}}[n-1] - \Delta_{T_{\mathrm{c}}} \leq T_{\mathrm{c}}[n] \leq T_{\mathrm{c}}[n-1] + \Delta_{T_{\mathrm{c}}},$$

  přičemž z důvodu prodlev, způsobených přepínáním signálních plánů při synchronizaci koordinovaných křižovatek po změně délky cyklu, nastavujeme $\Delta_{T_{\mathrm{c}}} = 10\,\mathrm{s}$.

- Délka $g_{\mathrm{F}x}[n]$ zelené fáze x na každé křižovatce nesmí být menší, než minimální doba zelené $g_{\min}$ a nesmí překročit maximální dobu volna, kterou lze v daném signálním plánu fázi přiřadit. Tato doba je dána délkou cyklu T_{c}, poníženou o součet všech mezičasů τ_{dead} a o dobu, rezervovanou na minimální délku zbývajících $f-1$ fází signálního plánu, tedy $(f-1) \cdot g_{\min}$:

$$g_{\min} \leq g_{\mathrm{F}x}[n] \leq T_{\mathrm{c}}[n] - \tau_{\text{dead}} - (f-1) \cdot g_{\min}$$

- Změna délky každé fáze $g_{\mathrm{F}x}[n]$ je opět shora i zdola omezená,

$$g_{\mathrm{F}x}[n-1] - \Delta_g \le g_{\mathrm{F}x}[n] \le g_{\mathrm{F}x}[n] + \Delta_g,$$

  hodnotu největší povolené změny volíme typicky $\Delta_g = 5\,\mathrm{s}$.

- Ofset signálního plánu $\vartheta[n]$ je kladný a nejvýše $T_\mathrm{c}[n] - 1$ sekund,

$$0 \le \vartheta[n] \le T_\mathrm{c}[n] - 1.$$

Po zpracování na formát vyhovující podmínce (8) obdržíme pro stavové proměnné podmínky

$$\begin{aligned} \xi[n] &\le \xi_{\max} \\ \text{-}\xi[n] &\le 0 \\ -\psi[n] &\le 0 \end{aligned}$$

z nichž snadno nahlédneme, že

$$\mathbf{Q}_\mathrm{state} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\mathbf{I} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_\mathrm{state} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_\mathrm{max} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_\mathrm{max} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pro řídicí proměnné platí poněkud složitjší podmínky, zahrnující vazby mezi jednotlivými horizonty a jednotlivými skupinami řídicí proměnných,

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{F}x}[n] - g_{\mathrm{F}x}[n-1] &\le \Delta_g \\ -g_{\mathrm{F}x}[n] + g_{\mathrm{F}x}[n-1] &\le \Delta_g \\ g_{\mathrm{F}x}[n] - T_\mathrm{c}[n] &\le -\tau_\mathrm{dead} - (f-1)\cdot g_\mathrm{min} \\ -g_{\mathrm{F}x}[n] &\le -g_\mathrm{min} \\ \vartheta[n] - T_\mathrm{c}[n] &\le -1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\vartheta[n] &\le 0 \\
T_\mathrm{c}[n] &\le T_\mathrm{c,max} \\
-T_\mathrm{c}[n] &\le -T_\mathrm{c,min} \\
T_\mathrm{c}[n] - T_\mathrm{c}[n-1] &\le \Delta_{T_\mathrm{c}} \\
-T_\mathrm{c}[n] + T_\mathrm{c}[n-1] &\le \Delta_{T_\mathrm{c}}
\end{aligned}
$$

Z této soustavy pro přehlednost odvodíme nejprve tvar dílčí matice $\mathbf{Q}^\star_\mathrm{ctrl}$ a prvé strany $\mathbf{s}^\star_\mathrm{ctrl}$ pro dva po sobě následující horizonty,

$$
\mathbf{Q}^\star_\mathrm{ctrl} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
-\mathbf{I} & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\
\mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & -1 \\
 & \vdots & & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\
 & \vdots & & 0 & \mathbf{I} & -1 \\
 & \vdots & & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\
 & \vdots & & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^\star_\mathrm{l} & \mathbf{Q}^\star_\mathrm{r} \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{s}^\star_\mathrm{ctrl} = \begin{pmatrix}
\Delta_g \\
\Delta_g \\
-\tau_\mathrm{dead} - (f-1)\cdot g_\mathrm{min} \\
-g_\mathrm{min} \\
-1 \\
0 \\
T_\mathrm{c,max} \\
-T_\mathrm{c,min} \\
\Delta_{T_\mathrm{c}} \\
\Delta_{T_\mathrm{c}}
\end{pmatrix}.
$$

Důvod pro dekompozici $\mathbf{Q}^\star_\mathrm{ctrl}$ na $\mathbf{Q}^\star_\mathrm{l}$ a $\mathbf{Q}^\star_\mathrm{r}$ vyplyne z konstrukce matic omezujících podmínek řízení:

$$
\mathbf{Q}_\mathrm{ctrl} = \begin{pmatrix}
\mathbf{Q}^\star_\mathrm{l} & \mathbf{Q}^\star_\mathrm{r} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \mathbf{Q}^\star_\mathrm{l} & \mathbf{Q}^\star_\mathrm{r} & & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots & \mathbf{Q}^\star_\mathrm{l} & \mathbf{Q}^\star_\mathrm{r}
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{s}_\mathrm{ctrl} = \begin{pmatrix}
\mathbf{s}^\star_\mathrm{ctrl} \\
\mathbf{s}^\star_\mathrm{ctrl} \\
\vdots \\
\mathbf{s}^\star_\mathrm{ctrl}
\end{pmatrix}.
$$

5.3 Omezení hodnot $\chi_{\mathsf{lb}} \leq \chi \leq \chi_{\mathsf{ub}}$

Podmínka (9) v původní verzi zaručuje omezení délky modelovaných front tak, aby fronty byly kladné a nepřetékaly do následujících křižovatek. V původním modelu zároveň také omezovala délku fází tak, aby žádná fáze nebyla kratší, než povinné minimum (opět většinou 5s) a aby žádná fáze nebyla delší, než délka cyklu T_c zmenšená o součet všech mezičasů a ostatních minimálních zelených. S přechodem na současnou optimalizaci všech hodnot toto ale přestává platit a podmínky na délky fází se vzhledem k možné proměnné délce T_c přesouvají do podmínek, daných rovnicí (8), diskutovaných v předchozím odstavci. Vzhledem k tomu již není možné omezit celý stav nějakým minimem a maximem a v nové verzi řízení se podmínka (9) vůbec neuplatní.

References

[1] NAGY I. *Nová struktura stavů.* Současný odhad stavu a neznámých parametrů modelu – nelineární filtrace. Praha, 2005. Osobní poznámky autora.

[2] HOMOLOVÁ J., NAGY I. Traffic model of a microregion. In: P. HORÁČEK, M. ŠIMANDL, P. ZÍTEK, eds. *Preprints of the 16th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, Praha: IFAC, 2005, pp. 1–6.